

**Loại ❶. HỌ NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ**

**1. Định nghĩa**

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên khoảng  $K$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x \in K$ .

**Nhận xét.** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì  $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$  cũng là nguyên hàm của  $f(x)$ .

Ký hiệu:  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

**2. Tính chất**

- $\int f(x) dx' = f(x)$ .
- $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

**3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp**

<b>Bảng nguyên hàm</b>	
$\int k dx = kx + C, k$ là hằng số	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

**Câu 1.** Hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm trên  $K$  nếu:

- A.**  $f(x)$  xác định trên  $K$ .
- B.**  $f(x)$  có giá trị lớn nhất trên  $K$ .
- C.**  $f(x)$  có giá trị nhỏ nhất trên  $K$ .
- D.**  $f(x)$  liên tục trên  $K$ .

**Câu 2.** Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $a;b$  và  $C$  là hằng số thì  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .
- B.** Mọi hàm số liên tục trên  $a;b$  đều có nguyên hàm trên  $a;b$ .

**C.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $a; b \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in a; b$ .

**D.**  $\int f(x) dx' = f(x)$ .

**Câu 3.** Xét hai khẳng định sau:

(I) Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $a; b$  đều có đạo hàm trên đoạn đó.

(II) Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $a; b$  đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

Trong hai khẳng định trên:

**A.** Chỉ có (I) đúng.

**B.** Chỉ có (II) đúng.

**C.** Cả hai đều đúng.

**D.** Cả hai đều sai.

**Câu 4.** Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $a; b$  nếu:

**A.** Với mọi  $x \in a; b$ , ta có  $F'(x) = f(x)$ .

**B.** Với mọi  $x \in a; b$ , ta có  $f'(x) = F(x)$ .

**C.** Với mọi  $x \in a; b$ , ta có  $F'(x) = f(x)$ .

**D.** Với mọi  $x \in a; b$ , ta có  $F'(x) = f(x)$ , ngoài ra  $F'(a^+) = f(a)$  và  $F'(b^-) = f(b)$ .

**Câu 5.** Trong các câu sau đây, nói về nguyên hàm của một hàm số  $f$  xác định trên khoảng  $D$ , câu nào là sai?

(I)  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên  $D$  nếu và chỉ nếu  $\forall x \in D: F'(x) = f(x)$ .

(II) Nếu  $f$  liên tục trên  $D$  thì  $f$  có nguyên hàm trên  $D$ .

(III) Hai nguyên hàm trên  $D$  của cùng một hàm số thì sai khác nhau một hằng số.

**A.** Không có câu nào sai.

**B.** Câu (I) sai.

**C.** Câu (II) sai.

**D.** Câu (III) sai.

**Câu 6.** Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $a; b$ . Giả sử  $G(x)$  cũng là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên khoảng  $a; b$ . Khi đó:

**A.**  $F(x) = G(x)$  trên khoảng  $a; b$ .

**B.**  $G(x) = F(x) - C$  trên khoảng  $a; b$ , với  $C$  là hằng số.

**C.**  $F(x) = G(x) + C$  với mọi  $x$  thuộc giao của hai miền xác định,  $C$  là hằng số.

**D.** Cả ba câu trên đều sai.

**Câu 7.** Xét hai câu sau:

(I)  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C$ ,

trong đó  $F(x)$  và  $G(x)$  tương ứng là nguyên hàm của  $f(x), g(x)$ .

(II) Mỗi nguyên hàm của  $a \cdot f(x)$  là tích của  $a$  với một nguyên hàm của  $f(x)$ .

Trong hai câu trên:

**A.** Chỉ có (I) đúng.

**B.** Chỉ có (II) đúng.

**C.** Cả hai câu đều đúng.

**D.** Cả hai câu đều sai.

**Câu 8.** Các khẳng định nào sau đây là sai?

**A.**  $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(t) dt = F(t) + C$ .

**B.**  $\left[ \int f(x) dx \right]' = f(x)$ .

**C.**  $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u) dx = F(u) + C$ .

**D.**  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$  ( $k$  là hằng số).

**Câu 9.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.**  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2x$ .

**B.**  $F(x) = x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = 2\sqrt{x}$ .

**C.** Nếu  $F(x)$  và  $G(x)$  đều là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì  $F(x) - G(x) = C$  (hằng số).

**D.**  $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$ .

**Câu 10.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

**A.** Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì mọi nguyên hàm của  $f(x)$  đều có

dạng  $F(x) = C$  ( $C$  là hằng số).

**B.**  $\int \frac{u'}{u} dx = \log|u| + C$ .

**C.**  $F(x) = 1 + \tan x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 1 + \tan^2 x$ .

**D.**  $F(x) = 5 - \cos x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin x$ .

**Câu 11.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.**  $\int 0 dx = C$  ( $C$  là hằng số).      **B.**  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  ( $C$  là hằng số).

**C.**  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  ( $C$  là hằng số).      **D.**  $\int dx = x + C$  ( $C$  là hằng số).

**Câu 12. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos 3x$

**A.**  $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$ .      **B.**  $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$ .      **C.**  $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$ .      **D.**

$\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ .

**Câu 13.** Hàm số  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  có nguyên hàm trên:

**A.**  $0; \pi$ .      **B.**  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .      **C.**  $\pi; 2\pi$ .      **D.**  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Câu 14. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2 \sin x$

**A.**  $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$ .

**B.**  $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$

**C.**  $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$

**D.**  $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

**Câu 15.** Một nguyên hàm của hàm số  $y = f(x) = \frac{x-1}{2x^2}$  là kết quả nào sau đây?

**A.**  $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2x}$ .

**B.**  $F(x) = \frac{3x-1}{4x^3}$ .

**C.**  $F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$ .

**D.** Một kết quả khác.

**Câu 16.** Tính  $\int e^x \cdot e^{x+1} dx$  ta được kết quả nào sau đây?

**A.**  $e^x \cdot e^{x+1} + C$ .      **B.**  $\frac{1}{2} e^{2x+1} + C$ .      **C.**  $2e^{2x+1} + C$ .      **D.** Một kết quả khác.

**Câu 17.** Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x-3$ ?

**A.**  $F(x) = \frac{x-3}{5} + x$ .

**B.**  $F(x) = \frac{x-3}{5}$ .

**C.**  $F(x) = \frac{x-3}{5} + 2017$ .

**D.**  $F(x) = \frac{x-3}{5} - 1$ .

**Câu 18. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = e^x + 2x$  thỏa mãn  $F(0) = \frac{3}{2}$ . Tìm  $F(x)$ .

**A.**  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

**B.**  $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

**C.**  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

**D.**  $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

**Câu 19.** Hàm số  $F(x) = e^{x^3}$  là một nguyên hàm của hàm số:

**A.**  $f(x) = e^{x^3}$ .      **B.**  $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$ .      **C.**  $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$ .      **D.**  $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3-1}$ .

**Câu 20.** Cho  $I = \int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$ . Khi đó kết quả nào sau đây là sai?

**A.**  $I = 2^{\sqrt{x}} + C$ .      **B.**  $I = 2^{\sqrt{x}+1} + C$ .      **C.**  $I = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 1 + C$ .      **D.**  $I = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1 + C$ .

**Câu 21.** Cho  $I = \int 2^{\frac{1}{2x}} \cdot \frac{\ln 2}{x^2} dx$ . Khi đó kết quả nào sau đây là sai?

- A.  $I = 2 \left( 2^{\frac{1}{2x}} + 2 \right) + C$ .      B.  $I = 2^{\frac{1}{2x}+1} + C$ .  
 C.  $I = 2^{\frac{1}{2x}} + C$ .      D.  $I = 2 \left( 2^{\frac{1}{2x}} - 2 \right) + C$ .

**Câu 22. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = 3 - 5 \sin x$  và  $f(0) = 10$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$       B.  $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$   
 C.  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$       D.  $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

**Câu 23.** Nếu  $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$  thì  $f(x)$  bằng:

- A.  $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x$ .      B.  $f(x) = 3x^2 + e^x$ .      C.  $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$ .      D.  $f(x) = x^2 + e^x$ .

**Câu 24.** Nếu  $\int f(x) dx = \sin 2x \cos x$  thì  $f(x)$  là:

- A.  $f(x) = \frac{1}{2} (3 \cos 3x + \cos x)$ .      B.  $f(x) = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x)$ .  
 C.  $f(x) = \frac{1}{2} (3 \cos 3x - \cos x)$ .      D.  $f(x) = \frac{1}{2} (\cos 3x - \cos x)$ .

**Câu 25.** Nếu  $\int f(x) dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$  thì  $f(x)$  là:

- A.  $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C$ .      B.  $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + C$ .  
 C.  $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C$ .      D.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ .

**Câu 26. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

- A.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$ .      B.  $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C$ .  
 C.  $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$ .      D.  $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$ .

**Câu 27.** Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

- A.  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \cos^2 x$ .      B.  $f(x) = \tan^2 x$  và  $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2}$ .  
 C.  $f(x) = e^x$  và  $g(x) = e^{-x}$ .      D.  $f(x) = \sin 2x$  và  $g(x) = \sin^2 x$ .

**Câu 28.** Tìm số thực  $m$  để hàm số  $F(x) = mx^3 + 3m + 2x^2 - 4x + 3$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$ .

- A.  $m = -1$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 2$ .

**Câu 29. (Sai)** Cho hàm số  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ . Tìm  $a, b, c$  để  $F(x) = ax^2 + bx + c \cdot e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

- A.  $a; b; c = 1; 2; 0$ .      B.  $a; b; c = 1; -2; 0$ .  
 C.  $a; b; c = -1; 2; 0$ .      D.  $a; b; c = 2; 1; 0$ .

**Câu 30. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 7^x$ .

- A.  $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$       B.  $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$   
 C.  $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$       D.  $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

**Câu 31.** Để  $F(x) = a \cos x + b \sin x e^x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = e^x \cos x$  thì giá trị của  $a, b$  là:

- A.  $a=1, b=0$ . B.  $a=0, b=1$ . C.  $a=b=1$ . D.  $a=b=\frac{1}{2}$ .

**Câu 32.** Giả sử hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c \cdot e^{-x}$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(x) = x(1-x)e^{-x}$ .

Tính tổng  $A = a + b + c$ , ta được:

- A.  $A = -2$ . B.  $A = 4$ . C.  $A = 1$ . D.  $A = 3$ .

**Câu 33.** Cho các hàm số  $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ ;  $F(x) = ax^2 + bx + c \sqrt{2x-3}$  với  $x > \frac{3}{2}$ . Để hàm số  $F(x)$

là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì giá trị của  $a, b, c$  là:

- A.  $a=4, b=2, c=1$ . B.  $a=4, b=-2, c=-1$ .  
C.  $a=4, b=-2, c=1$ . D.  $a=4, b=2, c=-1$ .

**Câu 34.** Với giá trị nào của  $a, b, c, d$  thì  $F(x) = ax + b \cdot \cos x + cx + d \cdot \sin x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = x \cos x$ ?

- A.  $a=b=1, c=d=0$ . B.  $a=d=0, b=c=1$ .  
C.  $a=1, b=2, c=-1, d=-2$ . D. Kết quả khác.

**Câu 35.** Một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin^2 x$  là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng  $\frac{\pi}{8}$  khi  $x = \frac{\pi}{4}$ ?

- A.  $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3}$ . B.  $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$ .  
C.  $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}$ . D.  $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12}$ .

**Câu 36.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$  và  $f(1) = 1$  thì  $f(5)$  có giá trị bằng:

- A.  $\ln 2$ . B.  $\ln 3$ . C.  $\ln 2 + 1$ . D.  $\ln 3 + 1$ .

**Câu 37. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos x$  thỏa mãn  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

- A.  $F(x) = \cos x - \sin x + 3$  B.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$   
C.  $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$  D.  $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

**Câu 38.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$ . Tìm  $m$  để nguyên hàm  $F(x)$  của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(0) = 1$

và  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$ .

- A.  $m = -\frac{4}{3}$ . B.  $m = \frac{3}{4}$ . C.  $m = -\frac{3}{4}$ . D.  $m = \frac{4}{3}$ .

**Câu 39.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ . Nếu  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  và đồ thị

$y = F(x)$  đi qua điểm  $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$  thì  $F(x)$  là:

- A.  $F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \cot x$ . B.  $F(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \cot x$ .  
C.  $F(x) = -\sqrt{3} + \cot x$ . D.  $F(x) = \sqrt{3} - \cot x$ .

**Câu 40.** Giả sử  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 4x - 1$ . Đồ thị của hàm số  $F(x)$  và  $f(x)$  cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Tọa độ các điểm chung của hai đồ thị hàm số trên là:

- A.  $0; -1$ . B.  $\left(\frac{5}{2}; 9\right)$ . C.  $0; -1$  và  $\left(\frac{5}{2}; 9\right)$ . D.  $\left(\frac{5}{2}; 8\right)$ .

**1. Phương pháp đổi biến số**

Nếu  $\int f(x) dx = F(x) + C$  thì  $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ .

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm  $I = \int f(x) dx$ , trong đó ta có thể phân tích  $f(x) = g(u(x)) \cdot u'(x)$  thì ta thực hiện phép đổi biến số  $t = u(x)$ , suy ra  $dt = u'(x) dx$ .

Khi đó ta được nguyên hàm:  $\int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$ .

*Chú ý:* Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo  $t$  thì ta phải thay  $t = u(x)$ .

**Câu 34. Câu nào sau đây sai?**

**A.** Nếu  $F'(t) = f(t)$  thì  $F'(u(x)) = f(u(x))$ .

**B.**  $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ .

**C.** Nếu  $G(t)$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(t)$  thì  $G(u(x))$  là một nguyên hàm của hàm số  $g(u(x)) \cdot u'(x)$ .

**D.**  $\int f(t) dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$  với  $u = u(x)$ .

**Câu 35. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?**

**A.** Nếu  $\int f(t) dt = F(t) + C$  thì  $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ .

**B.** Nếu  $F(x)$  và  $G(x)$  đều là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì  $\int [F(x) - G(x)] dx$  có dạng  $h(x) = Cx + D$  ( $C, D$  là các hằng số và  $C \neq 0$ ).

**C.**  $F(x) = 7 + \sin^2 x$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \sin 2x$ .

**D.**  $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \sqrt{u(x)} + C$ .

**Câu 41. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{2x-1}$ .

**A.**  $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$ .      **B.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$ .

**C.**  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C$ .      **D.**  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$ .

**Câu 42.** Để tính  $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$  theo phương pháp đổi biến số, ta đặt:

**A.**  $t = e^{\ln x}$ .      **B.**  $t = \ln x$ .      **C.**  $t = x$ .      **D.**  $t = \frac{1}{x}$ .

**Câu 43.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = xe^{x^2}$ .

Hàm số nào sau đây không phải là  $F(x)$ :

**A.**  $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + 2$ .      **B.**  $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + 5$ .

**C.**  $F(x) = -\frac{1}{2} e^{x^2} + C$ .      **D.**  $F(x) = -\frac{1}{2} (2 - e^{x^2})$ .

**Câu 44. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

Tính  $F(e) - F(1)$

**A.**  $I = e$ .      **B.**  $I = \frac{1}{e}$ .      **C.**  $I = \frac{1}{2}$ .      **D.**  $I = 1$ .

**Câu 45.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

Nếu  $F(e^2) = 4$  thì  $\int \frac{\ln x}{x} dx$  bằng:

A.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

B.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2.$

C.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - 2.$

D.  $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x + C.$

**Câu 46.**  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = e^{\sin x} \cos x.$

Nếu  $F(\pi) = 5$  thì  $\int e^{\sin x} \cos x dx$  bằng:

A.  $F(x) = e^{\sin x} + 4.$

B.  $F(x) = e^{\sin x} + C.$

C.  $F(x) = e^{\cos x} + 4.$

D.  $F(x) = e^{\cos x} + C.$

**Câu 47.**  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $y = \sin^4 x \cos x.$

$F(x)$  là hàm số nào sau đây?

A.  $F(x) = \frac{\cos^5 x}{5} + C.$

B.  $F(x) = \frac{\cos^4 x}{4} + C.$

C.  $F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

D.  $F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

**Câu 48.** Xét các mệnh đề sau, với  $C$  là hằng số:

(I)  $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$

(II)  $\int e^{3 \cos x} \sin x dx = -\frac{1}{3} e^{3 \cos x} + C.$

(III)  $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C.$

Số mệnh đề đúng là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Loại 3. TÌM HỌ NGUYÊN HÀM = PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN**

**2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần**

Cho hai hàm số  $u$  và  $v$  liên tục trên đoạn  $a; b$  và có đạo hàm liên tục trên đoạn  $a; b.$

Khi đó:  $\int u dv = uv - \int v du. *$

Để tính nguyên hàm  $\int f(x) dx$  bằng từng phần ta làm như sau:

**Bước 1.** Chọn  $u, v$  sao cho  $f(x) dx = u dv$  (chú ý  $dv = v' x dx$ ).

Sau đó tính  $v = \int dv$  và  $du = u' dx.$

**Bước 2.** Thay vào công thức  $*$  và tính  $\int v du.$

*Chú ý.* Cần phải lựa chọn  $u$  và  $dv$  hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được  $v$  và tích phân  $\int v du$  dễ tính hơn  $\int u dv.$  Ta thường gặp các dạng sau

• **Dạng 1.**  $I = \int P(x) \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] dx,$  trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[ \frac{\sin x}{\cos x} \right] dx \end{cases}.$

• **Dạng 2.**  $I = \int P(x) e^{ax+b} dx,$  trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}.$

• **Dạng 3.**  $I = \int P(x) \ln mx + n dx,$  trong đó  $P(x)$  là đa thức.

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \ln mx + n \\ dv = P x dx \end{cases}$ .

• **Dạng 4.**  $I = \int \frac{\sin x}{\cos x} e^x dx$ .

Với dạng này, ta đặt  $\begin{cases} u = \frac{\sin x}{\cos x} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ .

**Câu 49.** Để tính  $\int x \ln 2 + x dx$  theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta đặt:

- A.  $\begin{cases} u = x \\ dv = \ln 2 + x dx \end{cases}$       B.  $\begin{cases} u = \ln 2 + x \\ dv = x dx \end{cases}$   
 C.  $\begin{cases} u = x \ln 2 + x \\ dv = dx \end{cases}$       D.  $\begin{cases} u = \ln 2 + x \\ dv = dx \end{cases}$

**Câu 50.** Để tính  $\int x^2 \cos x dx$  theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta đặt:

- A.  $\begin{cases} u = x \\ dv = x \cos x dx \end{cases}$       B.  $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases}$       C.  $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$       D.  $\begin{cases} u = x^2 \cos x \\ dv = dx \end{cases}$

**Câu 51.** Kết quả của  $I = \int x e^x dx$  là:

- A.  $I = e^x + x e^x + C$ .      B.  $I = \frac{x^2}{2} e^x + C$ .  
 C.  $I = x e^x - e^x + C$ .      D.  $I = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C$ .

**Câu 52. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $F(x) = (x-1)e^x$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

- A.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$       B.  $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2} e^x + C$   
 C.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$       D.  $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$

**Câu 53.** Hàm số  $f(x) = x-1 e^x$  có một nguyên hàm  $F(x)$  là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này bằng 1 khi  $x=0$ ?

- A.  $F(x) = x-1 e^x$ .      B.  $F(x) = x-2 e^x$ .  
 C.  $F(x) = x+1 e^x + 1$ .      D.  $F(x) = x-2 e^x + 3$ .

**Câu 54.** Một nguyên hàm của  $f(x) = x \ln x$  là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này triệt tiêu khi  $x=1$ ?

- A.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + 1$ .      B.  $F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x + 1$ .  
 C.  $F(x) = \frac{1}{2} x \ln x + \frac{1}{2} x^2 + 1$ .      D. Một kết quả khác.

**Câu 55. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $F(x) = \frac{1}{2x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số

$\frac{f(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$

- A.  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$       B.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$   
 C.  $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$       D.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

**Câu 56.** Tính nguyên hàm  $I = \int \frac{\ln \ln x}{x} dx$  được kết quả nào sau đây?

- A.  $I = \ln x \cdot \ln \ln x + C$ .      B.  $I = \ln x \cdot \ln \ln x + \ln x + C$ .  
 C.  $I = \ln x \cdot \ln \ln x - \ln x + C$ .      D.  $I = \ln \ln x + \ln x + C$ .



**Câu 57. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x)e^{2x}$ .

- A.  $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C$       B.  $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + x + C$   
 C.  $\int f'(x)e^{2x} dx = 2x^2 - 2x + C$       D.  $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C$

**Câu 58.** Tính nguyên hàm  $I = \int \sin x \cdot e^x dx$ , ta được:

- A.  $I = \frac{1}{2} e^x \sin x - e^x \cos x + C$ .      B.  $I = \frac{1}{2} e^x \sin x + e^x \cos x + C$ .  
 C.  $I = e^x \sin x + C$ .      D.  $I = e^x \cos x + C$ .

**Câu 59. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $F(x) = -\frac{1}{3x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $\frac{f'(x)}{x}$ . Tìm nguyên hàm của hàm số  $f'(x) \ln x$ .

- A.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$       B.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$   
 C.  $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$       D.  $\int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

**Câu 60.** Để tìm nguyên hàm của  $f(x) = \sin^4 x \cos^4 x$  thì nên:

- A. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt  $t = \sin x$ .  
 B. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt  $t = \cos x$ .  
 C. Biến đổi lượng giác  $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1 - \cos 4x}{8}$  rồi tính.  
 D. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, đặt  $u = \sin^4 x$ ,  $dv = \cos^4 x dx$ .

## Loại 4. ĐỊNH NGHĨA TÍCH PHÂN

### 1. Định nghĩa

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $K$  và  $a, b$  là hai số bất kì thuộc  $K$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  thì hiệu số

$$F(b) - F(a)$$

được gọi là tích phân của  $f(x)$  từ  $a$  đến  $b$  và kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### 2. Tính chất

- Tích phân tại một giá trị xác định của biến số thì bằng 0, tức là  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .
- Đổi cận thì đổi dấu, tức là  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .
- Hằng số trong tích phân có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, tức là  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  là hằng số).
- Tích phân một tổng bằng tổng các tích phân, tức là  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ .

▪ Tách đôi tích phân, tức là  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

Chú ý: Tích phân  $\int_a^b f(x) dx$  chỉ phụ thuộc vào hàm  $f$  và các cận  $a, b$  mà không phụ thuộc vào biến số  $x$ , tức là  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ .

**Câu 61.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $a; b$ . Hãy chọn mệnh đề **sai** dưới đây:

**A.**  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .      **B.**  $\int_a^b k dx = k(b-a), \forall k \in \mathbb{R}$ .

**C.**  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  với  $c \in a; b$ .

**D.**  $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$ .

**Câu 62.** Giả sử hàm số  $f(x)$  liên tục trên khoảng  $K$  và  $a, b$  là hai điểm của  $K$ , ngoài ra  $k$  là một số thực tùy ý. Khi đó:

(I)  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .    (II)  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .    (III)  $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .

Trong ba công thức trên:

**A.** Chỉ có (I) sai.      **B.** Chỉ có (II) sai.

**C.** Chỉ có (I) và (II) sai.      **D.** Cả ba đều đúng.

**Câu 63.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.**  $\int_{-1}^1 dx = 1$ .      **B.**  $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_a^b f_2(x) dx$ .

**C.** Nếu  $f(x)$  liên tục và không âm trên đoạn  $a; b$  thì  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**D.** Nếu  $\int_0^a f(x) dx = 0$  thì  $f(x)$  là hàm số lẻ.

**Câu 64.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.**  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  với mọi  $a, b, c$  thuộc tập xác định của  $f(x)$ .

**B.** Nếu  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  thì  $f(x) \geq 0, \forall x \in a; b$ .

**C.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} + C$ .

**D.** Nếu  $F(x)$  là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thì  $\sqrt{F(x)}$  là nguyên hàm của hàm số  $\sqrt{f(x)}$ .

**Câu 65.** Đặt  $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$ . Đạo hàm  $F'(x)$  là hàm số nào dưới đây?

**A.**  $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .      **B.**  $F'(x) = \sqrt{1+x^2}$ .

**C.**  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .      **D.**  $F'(x) = x^2 + 1 \sqrt{1+x^2}$ .

**Câu 66.** Cho  $F(x) = \int_1^x t^2 + t dt$ . Giá trị nhỏ nhất của  $F(x)$  trên đoạn  $-1; 1$  là:

**A.**  $\frac{1}{6}$ .      **B.** 2.      **C.**  $-\frac{5}{6}$ .      **D.**  $\frac{5}{6}$ .

**Câu 67.** Cho  $F(x) = \int_0^x \frac{t-\sqrt{3}}{t^2+1} dt$ . Xét các mệnh đề:

I.  $F'(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + 1}$ .

II. Hàm số  $F(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = \sqrt{3}$ .

III. Hàm số  $F(x)$  đạt cực đại tại  $x = \sqrt{3}$ .

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ I.      B. Chỉ II.      C. I và II.      D. I và III.

**Câu 68.** Hãy chọn mệnh đề sai dưới đây:

A.  $\int_0^1 x^2 dx \geq \int_0^1 x^3 dx$ .

B. Đạo hàm của  $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t}$  là  $F'(x) = \frac{1}{1+x}$   $x > 0$ .

C. Hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[-a; a]$  thì  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

D. Nếu  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thì  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ .

**Câu 69.** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_{-3}^0 f(x) dx = a$ . Chọn mệnh đề đúng:

A.  $\int_0^3 f(x) dx = -a$ .

B.  $\int_{-3}^3 f(x) dx = 2a$ .

C.  $\int_{-3}^3 f(x) dx = a$ .

D.  $\int_3^0 f(x) dx = a$ .

**Câu 70.** Nếu  $f(1) = 12$ ,  $f'(x)$  liên tục và  $\int_1^4 f'(x) dx = 17$ . Giá trị của  $f(4)$  bằng:

- A. 29.      B. 5.      C. 19.      D. 9.

**Câu 71.** Cho  $\int_2^5 f(x) dx = 10$ . Khi đó  $\int_5^2 [2 - 4f(x)] dx$  bằng:

- A. 32.      B. 34.      C. 36.      D. 40.

**Câu 72.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 1$  và  $\int_1^4 f(t) dt = -3$ . Giá trị của  $\int_2^4 f(u) du$  là:

- A. -2.      B. -4.      C. 4.      D. 2.

**Câu 73.** Cho hàm  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_a^d f(x) dx = 10$ ,  $\int_b^d f(x) dx = 8$ ,  $\int_a^c f(x) dx = 7$ .

Tính  $I = \int_b^c f(x) dx$ , ta được.

- A.  $I = -5$ .      B.  $I = 7$ .      C.  $I = 5$ .      D.  $I = -7$ .

**Câu 74.** Cho biết  $\int_1^3 f(x) dx = -2$ ,  $\int_1^4 f(x) dx = 3$ ,  $\int_1^4 g(x) dx = 7$ .

Khẳng định nào sau đây là sai?

A.  $\int_1^4 [f(x) + g(x)] dx = 10$ .

B.  $\int_3^4 f(x) dx = 1$ .

C.  $\int_4^3 f(x) dx = -5$ .

D.  $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)] dx = -2$ .

**Câu 75.** Cho biết  $A = \int_1^2 [3f(x) + 2g(x)] dx = 1$  và  $B = \int_1^2 [2f(x) - g(x)] dx = -3$ .

Giá trị của  $\int_1^2 f(x) dx$  bằng:

- A. 1.      B. 2.      C.  $-\frac{5}{7}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 76. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$ . Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$ .

- A.  $I = 7$                       B.  $I = 5 + \frac{\pi}{2}$                       C.  $I = 3$                       D.  $I = 5 + \pi$

**Câu 77.** Giả sử  $A, B$  là các hằng số của hàm số  $f(x) = A \sin \pi x + Bx^2$ .

Biết  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ . Giá trị của  $B$  là:

- A. 1.                      B. Một đáp số khác.                      C. 2.                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 78. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ . Tính

$$I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$$

- A.  $I = \frac{5}{2}$                       B.  $I = \frac{7}{2}$                       C.  $I = \frac{17}{2}$                       D.  $I = \frac{11}{2}$

**Câu 79.** Tính các hằng số  $A$  và  $B$  để hàm số  $f(x) = A \sin \pi x + B$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $f'(1) = 2$  và  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ .

- A.  $A = -\frac{2}{\pi}, B = 2$ .                      B.  $A = \frac{2}{\pi}, B = 2$ .  
C.  $A = -\frac{2}{\pi}, B = -2$ .                      D.  $A = \frac{2}{\pi}, B = -2$ .

**Câu 80.** Giá trị nào của  $b$  để  $\int_1^b 2x - 6 dx = 0$ ?

- A.  $b = 0$  hoặc  $b = 3$ .                      B.  $b = 0$  hoặc  $b = 1$   
C.  $b = 5$  hoặc  $b = 0$ .                      D.  $b = 1$  hoặc  $b = 5$ .

**Câu 81.** Cho  $\int_1^a \frac{x+1}{x} dx = e$  với  $a > 1$ . Khi đó, giá trị của  $a$  thỏa mãn là:

- A.  $\frac{1}{e}$ .                      B.  $e$ .                      C.  $\frac{e}{2}$ .                      D.  $e^2$ .

**Câu 82.** Để  $\int_1^k k - 4x dx = 6 - 5k$  thì giá trị của  $k$  là:

- A.  $k = 1$ .                      B.  $k = 2$ .                      C.  $k = 3$ .                      D.  $k = 4$ .

**Câu 83.** Để  $\int_0^x \left( \sin^2 t - \frac{1}{2} \right) dt = 0$ , với  $k \in \mathbb{Z}$  thì  $x$  thỏa:

- A.  $x = k2\pi$ .                      B.  $x = k\pi$ .                      C.  $x = k\frac{\pi}{2}$ .                      D.  $x = 2k + 1 \pi$ .

**Câu 84.** Nếu  $\int_0^a \cos x + \sin x dx = 0$   $0 < a < 2\pi$  thì giá trị  $a$  bằng:

- A.  $\frac{\pi}{4}$ .                      B.  $\frac{\pi}{2}$ .                      C.  $\frac{3\pi}{2}$ .                      D.  $\pi$ .

**Câu 85.** Nếu  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$  với  $c \in \mathbb{Q}$  thì giá trị của  $c$  bằng:

- A. 9.                      B. 6.                      C. 3.                      D. 81.

**Câu 86.** Nếu kết quả của  $\int_1^2 \frac{dx}{x+3}$  được viết ở dạng  $\ln \frac{a}{b}$  với  $a, b$  là các số tự nhiên và ước chung lớn nhất của  $a, b$  bằng 1. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $3a - b < 12$ .                      B.  $a + 2b = 13$ .                      C.  $a - b > 2$ .                      D.  $a^2 + b^2 = 41$ .

**Câu 87.** Tính tích phân  $\int_1^2 \left( \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ , ta thu được kết quả ở dạng  $a+b\ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.  $a^2 + b^2 > 10$ . B.  $a > 0$ . C.  $a - b > 1$ . D.  $b - 2a > 0$ .

**Câu 88.** Kết quả của tích phân  $\int_{-1}^0 \left( x+1 + \frac{2}{x-1} \right) dx$  được viết dưới dạng  $a+b\ln 2$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khi

đó  $a+b$  bằng:

- A.  $\frac{3}{2}$ . B.  $-\frac{3}{2}$ . C.  $\frac{5}{2}$ . D.  $-\frac{5}{2}$ .

**Câu 89.** Biết rằng  $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x} dx = a\ln 2 + b$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $a < 5$ . B.  $b > 4$ . C.  $a^2 + b^2 > 50$ . D.  $a + b < 1$ .

**Câu 90.** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x^2 - 2x + x - 1}{x+1} dx = a + b\ln 2 + c\ln 3$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Chọn khẳng định

đúng trong các khẳng định sau:

- A.  $b > 0$ . B.  $c < 0$ . C.  $a < 0$ . D.  $a + b + c > 0$ .

**Câu 91.** Cho tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x-2}{x+2} \frac{x^2-x+2}{x+2} dx = a + b\ln 2 + c\ln 3$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Chọn khẳng định

đúng trong các khẳng định sau:

- A.  $b > 0$ . B.  $c > 0$ . C.  $a < 0$ . D.  $a + b + c > 0$ .

## Loại 5. TÍNH TÍCH PHÂN = PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 1

### 1. Phương pháp đổi biến số

#### a) Phương pháp đổi biến số loại 1

Giả sử cần tính  $I = \int_a^b f(x) dx$  ta thực hiện các bước sau

**Bước 1.** Đặt  $x = u(t)$  (với  $u(t)$  là hàm có đạo hàm liên tục trên  $\alpha; \beta$ ,  $f[u(t)]$  xác định trên  $\alpha; \beta$  và  $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$ ) và xác định  $\alpha, \beta$ .

**Bước 2.** Thay vào, ta có:  $I = \int_{\alpha}^{\beta} f[u(t)] \cdot u'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$ .

#### Một số dạng thường dùng phương pháp đổi biến số loại 1

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\begin{cases} x =  a  \sin t & t \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \\ x =  a  \cos t & t \in 0; \pi \end{cases}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\begin{cases} x = \frac{ a }{\sin t} & t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus 0 \\ x = \frac{ a }{\cos t} & t \in 0, \pi \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \end{cases}$
$x^2 + a^2$	$x =  a  \tan t \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$

**Câu 108.** Đổi biến số  $x = 4\sin t$  của tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16-x^2} dx$ , ta được:

A.  $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .

B.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \cos 2t dt$ .

C.  $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt$ .

D.  $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \cos 2t dt$ .

**Câu 109.** Cho tích phân  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ . Nếu đổi biến số  $x = 2\sin t$  thì:

A.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$ .

B.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$ .

C.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$ .

D.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$ .

**Câu 110.** Đổi biến số  $x = \sqrt{3}\tan t$  của tích phân  $I = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2+3} dx$ , ta được:

A.  $I = \sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$ .

B.  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{t}$ .

C.  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} t dt$ .

D.  $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$ .

**Câu 111.** Cho tích phân  $I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx$ . Nếu đổi biến số  $x = \frac{1}{\sin t}$  thì:

A.  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$ .

B.  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$ .

C.  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$ .

D.  $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t dt$ .

## **Loại 6. TÍNH TÍCH PHÂN = PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ LOẠI 2**

### **b) Phương pháp đổi biến số loại 2**

Tương tự như nguyên hàm, ta có thể tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số (ta gọi là loại 2) như sau:

Để tính tích phân  $I = \int_a^b f(x) dx$  nếu  $f(x) = g(u(x)) \cdot u'(x)$ , ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau

**Bước 1.** Đặt  $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$ . Đổi cận  $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = u(a) \\ x = b \Rightarrow t = u(b) \end{cases}$ .

**Bước 2.** Thay vào ta có  $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t) dt = G(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$ .

**Câu 112.** Cho hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A.  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx$ .

B.  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

C.  $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ .

D.  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$ .

**Câu 113. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $\int_0^6 f(x) dx = 12$ . Tính  $I = \int_0^2 f(3x) dx$ .

A.  $I = 6$

B.  $I = 36$

C.  $I = 2$

D.  $I = 4$

**Câu 114.** Nếu  $f(x)$  liên tục và  $\int_0^4 f(x) dx = 10$ , thì  $\int_0^2 f(2x) dx$  bằng:

A. 5.

B. 29.

C. 19.

D. 9.

**Câu 115.** Hàm số  $y = f(x)$  có nguyên hàm trên  $[a; b]$  đồng thời thỏa mãn  $f(a) = f(b)$ . Lựa chọn phương án đúng:

- A.**  $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = 0$ .      **B.**  $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = 1$ .  
**C.**  $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = -1$ .      **D.**  $\int_a^b f'(x) e^{f(x)} dx = 2$ .

**Câu 116.** Cho hàm số  $f(x)$  có nguyên hàm trên  $\mathbb{R}$ . Xét các mệnh đề:

- I.**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ .      **II.**  $\int_0^1 \frac{f(e^x)}{e^x} dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x^2} dx$ .  
**III.**  $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx$ .

Các mệnh đề đúng là:

- A.** Chỉ I.      **B.** Chỉ II.      **C.** Chỉ III.      **D.** Cả I, II và III.

**Câu 117.** Cho  $f(x)$  là hàm số lẻ và liên tục trên  $[-a; a]$ . Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.**  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .      **B.**  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .  
**C.**  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx$ .      **D.**  $\int_{-a}^a f(x) dx = -2 \int_0^a f(x) dx$ .

**Câu 118.** Cho  $f(x)$  là hàm số lẻ và  $\int_{-2}^0 f(x) dx = 2$ . Giá trị của  $\int_0^2 f(x) dx$  là:

- A.** 2.      **B.** -2.      **C.** 1.      **D.** -1.

**Câu 119.** Cho  $f(x)$  là hàm số chẵn và  $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$ . Giá trị của  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  là:

- A.** 3.      **B.** 2.      **C.** 6.      **D.** -3.

**Câu 120.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ .

- A.**  $\frac{16}{9}$ .      **B.**  $-\frac{16}{9}$ .      **C.**  $\frac{52}{9}$ .      **D.**  $-\frac{52}{9}$ .

**Câu 121.** Cho  $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$  và  $u = x^2 - 1$ . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.**  $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$ .      **B.**  $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$ .      **C.**  $I = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$ .      **D.**  $I = 2\sqrt{3}$ .

**Câu 122.** Biến đổi  $\int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx$  thành  $\int_1^2 f(t) dt$ , với  $t = \sqrt{1+x}$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?

- A.**  $f(t) = 2t^2 - 2t$ .      **B.**  $f(t) = t^2 + t$ .      **C.**  $f(t) = t^2 - t$ .      **D.**  $f(t) = 2t^2 + 2t$ .

**Câu 123.** Cho tích phân  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$ . Nếu đổi biến số  $t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$  thì:

- A.**  $I = -\int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 1}$ .      **B.**  $I = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$ .      **C.**  $I = \int_{\sqrt{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2 - 1}$ .      **D.**  $I = \int_2^3 \frac{t dt}{t^2 + 1}$ .

**Câu 124.** Kết quả của tích phân  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$  có dạng  $I = a \ln 2 + b \ln \sqrt{2} - 1 + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Khi đó giá trị của  $a$  bằng:

- A.**  $a = \frac{1}{3}$ .      **B.**  $a = -\frac{1}{3}$ .      **C.**  $a = -\frac{2}{3}$ .      **D.**  $a = \frac{2}{3}$ .

**Câu 125.** Biết rằng  $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \ln a$  với  $a \in \mathbb{Q}$ . Khi đó giá trị của  $a$  bằng:

- A.  $a=2$       B.  $a=\frac{1}{2}$ .      C.  $a=\sqrt{2}$ .      D.  $a=4$ .

**Câu 126. (TRÍCH ĐỀ THPT QG 2017)** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mđ nào dưới đây đúng ?

- A.  $a+b=2$ .      B.  $a-2b=0$ .      C.  $a+b=-2$ .      D.  $a+2b=0$ .

**Câu 127.** Cho  $2\sqrt{3}m - \int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+2} dx = 0$ . Khi đó  $144m^2 - 1$  bằng:

- A.  $-\frac{2}{3}$ .      B.  $4\sqrt{3}-1$ .      C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . D. Kết quả khác.

**Câu 128.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ .

- A.  $I=2$ .      B.  $I = \frac{\ln^2 2}{2}$ .      C.  $I = \ln 2$ .      D.  $I = -\frac{\ln^2 2}{2}$ .

**Câu 129.** Đổi biến  $u = \ln x$  thì tích phân  $I = \int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2} dx$  thành:

- A.  $I = \int_1^0 1-u du$ .      B.  $I = \int_0^1 1-u e^{-u} du$ .  
 C.  $I = \int_1^0 1-u e^u du$ .      D.  $I = \int_1^0 1-u e^{2u} du$ .

**Câu 130.** Cho  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$  và  $t = \sqrt{1+3\ln x}$ .

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$ .      B.  $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$ .      C.  $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$ .      D.  $I = \frac{14}{9}$ .

**Câu 131.** Biến đổi  $\int_1^e \frac{\ln x}{x \ln x + 2} dx$  thành  $\int_2^3 f(t) dt$ , với  $t = \ln x + 2$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?

- A.  $f(t) = \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}$ .      B.  $f(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}$ .      C.  $f(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$ .      D.  $f(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$ .

**Câu 132.** Kết quả của tích phân  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x \ln^2 x + 1} dx$  có dạng  $I = a \ln 2 + b$  với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $2a+b=1$ .      B.  $a^2+b^2=4$ .      C.  $a-b=1$ .      D.  $ab=2$ .

**Câu 133.** Tính tích phân  $I = \int_0^1 x e^{x^2} dx$ .

- A.  $I = \frac{e}{2}$ .      B.  $I = \frac{e+1}{2}$ .      C.  $I = \frac{e-1}{2}$ .      D.  $I = e$ .

**Câu 134.** Cho  $I = \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx$  và  $t = \sqrt{e^x - 1}$ .

Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $I = 2 \int_0^1 t^2 dt$ .      B.  $I = \int_0^1 t^2 dt$ .      C.  $I = \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1$ .      D.  $I = \frac{2}{3}$ .

**Câu 135.** Biến đổi  $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x + 1}$  thành  $\int_1^3 f(t) dt$ , với  $t = e^x$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?



A.  $f(t) = \frac{1}{t^2 - t}$ . B.  $f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}$ . C.  $f(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}$ . D.  $f(t) = \frac{1}{t^2 + t}$ .

**Câu 136.** Tìm  $a$  biết  $I = \int_{-1}^2 \frac{e^x dx}{2+e^x} = \ln \frac{ae+e^3}{ae+b}$  với  $a, b$  là các số nguyên dương.

A.  $a = \frac{1}{3}$ . B.  $a = -\frac{1}{3}$ . C.  $a = 2$ . D.  $a = -2$ .

**Câu 137.** Để tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$  ta chọn cách đặt nào sau đây cho phù hợp?

A. Đặt  $t = e^{\sin x}$ . B. Đặt  $t = \sin x$ . C. Đặt  $t = \cos x$ . D. Đặt  $t = e^x$ .

**Câu 138.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$ .

Nếu đổi biến số  $t = \sin^2 x$  thì:

A.  $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt$ . B.  $I = 2 \left[ \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt \right]$ .

C.  $I = 2 \int_0^1 e^t (1-t) dt$ . D.  $I = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 te^t dt \right]$ .

**Câu 139.** Biến đổi  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$  thành  $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt$ , với  $t = \sin^2 x$ . Khi đó  $f(t)$  là hàm nào trong các hàm số sau?

A.  $f(t) = e^t \sin 2t$ . B.  $f(t) = e^t$ . C.  $f(t) = e^t \sin t$ . D.  $f(t) = \frac{1}{2} e^t$ .

**Câu 140. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Tính tích phân  $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$ .

A.  $I = -\frac{1}{4} \pi^4$ . B.  $I = -\pi^4$ . C.  $I = 0$ . D.  $I = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 141.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x)^3 dx$ .

A.  $I = \frac{\pi^4}{64}$ . B.  $I = \frac{15}{4}$ . C.  $I = \frac{31}{4}$ . D.  $I = \frac{7}{4}$ .

**Câu 142.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \tan x}{\cos^2 x \sqrt{3 \tan x + 1}} dx$ . Giả sử đặt  $u = \sqrt{3 \tan x + 1}$  thì ta được:

A.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 2u^2 + 1 du$ . B.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 u^2 + 1 du$ .

C.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 u^2 - 1 du$ . D.  $I = \frac{4}{3} \int_1^2 2u^2 - 1 du$ .

**Câu 143.** Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos^n x \sin x dx$  bằng:

A.  $I = \frac{1}{n+1}$ . B.  $I = \frac{1}{n-1}$ . C.  $I = \frac{1}{2n}$ . D.  $I = \frac{1}{n}$ .

**Câu 144.** Nếu  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$  thì  $n$  bằng:

A.  $n = 3$ . B.  $n = 4$ . C.  $n = 6$ . D.  $n = 5$ .

## Loại 7. TÍNH TÍCH PHÂN = PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

### 2. Phương pháp tích phân từng phần

Cho hai hàm số  $u$  và  $v$  liên tục trên  $a; b$  và có đạo hàm liên tục trên  $a; b$ .

$$\text{Khi đó: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Một số tích phân các hàm số dễ phát hiện  $u$  và  $dv$

<b>Dạng 1</b>	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln[g(x)] dx$	Đặt $\begin{cases} u = \ln[g(x)] \\ dv = f(x) dx \end{cases}$
<b>Dạng 2</b>	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$	Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$
<b>Dạng 3</b>	$\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$	Đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} \\ dv = e^{ax} dx \end{cases}$

**Câu 145.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \ln t dt$ . Chọn khẳng định **sai**?

- A.  $I = 2 \ln 2 - 1$ .    B.  $\ln \frac{4}{e}$ .    C.  $\ln 4 - \log 10$ .    D.  $\ln 4e$ .

**Câu 146.** Biết  $I = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$ . Giá trị của  $a$  bằng:

- A. 2.    B.  $\ln 2$ .    C. 4.    D. 8.

**Câu 147.** Kết quả của tích phân  $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$  được viết ở dạng  $I = a \ln 3 - b$  với  $a, b$  là các số nguyên. Khi đó  $a - b$  nhận giá trị nào sau đây?

- A. -1.    B. 0.    C. 1.    D. 2.

**Câu 148. (ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Tính tích phân  $I = \int_1^e x \ln x dx$ .

- A.  $I = \frac{1}{2}$ .    B.  $I = \frac{e^2 - 2}{2}$ .    C.  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$ .    D.  $I = \frac{e^2 - 1}{4}$ .

**Câu 149.** Khẳng định nào sau đây **đúng** về kết quả  $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$ ?

- A.  $ab = 64$ .    B.  $ab = 46$ .    C.  $a - b = 12$ .    D.  $a - b = 4$ .

**Câu 150.** Kết quả của tích phân  $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx$  được viết ở dạng  $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỉ. Hỏi tổng  $a + b + c$  bằng bao nhiêu?

- A. 0.    B. 1.    C.  $\frac{3}{2}$ .    D. 2.

## TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VÉC TƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN VÉC TƠ

### A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

$$1. \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$2. AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$3. \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

$$4. k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$5. |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$6. \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$7. \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$8. \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

$$9. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

$$10. \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$11. \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$12. \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$13. M \text{ chia đoạn } AB \text{ theo tỉ số } k \neq 1: M\left(\frac{x_A - kx_B}{1-k}, \frac{y_A - ky_B}{1-k}, \frac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$$

$$14. M \text{ là trung điểm } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

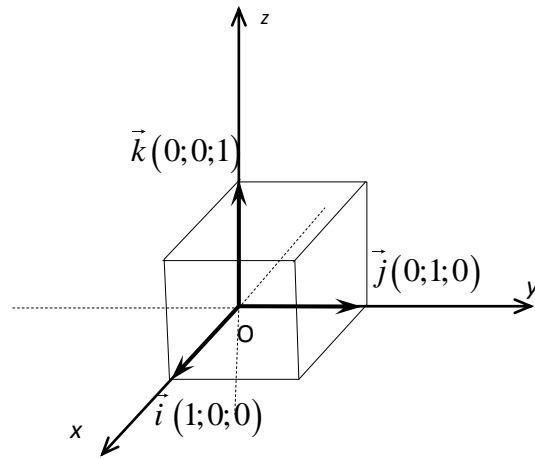
$$15. G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC: G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

$$16. \text{Véc tơ đơn vị: } \vec{i} = (1, 0, 0); \vec{j} = (0, 1, 0); \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$17. M(x, 0, 0) \in Ox; N(0, y, 0) \in Oy; K(0, 0, z) \in Oz$$

$$18. M(x, y, 0) \in Oxy; N(0, y, z) \in Oyz; K(x, 0, z) \in Oxz$$

$$19. S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



$$20. V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|$$

$$21. V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\overline{AB} \wedge \overline{AD}) \cdot \overline{AA'}|$$

## B – BÀI TẬP

**Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ  $\overline{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$ . Tọa độ của điểm A là

- A. (3, -2, 5)      B. (-3, -17, 2)      C. (3, 17, -2)      D. (3, 5, -2)

**Câu 2:** Trong không gian Oxyz cho 3 điểm A, B, C

thỏa:  $\overline{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ;  $\overline{OB} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ;  $\overline{OC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  với  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$ ;  $\vec{k}$  là các vectơ đơn vị. Xét các mệnh đề:

(I)  $\overline{AB} = (-1, 1, 4)$  (II)  $\overline{AC} = (1, 1, 2)$  Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. Cả (I) và (II) đều đúng      B. (I) đúng, (II) sai  
C. Cả (I) và (II) đều sai      D. (I) sai, (II) đúng

**Câu 3:** Cho  $\vec{m} = (1; 0; -1)$ ;  $\vec{n} = (0; 1; 1)$ . Kết luận nào sai:

- A.  $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1$       B.  $[\vec{m}, \vec{n}] = (1; -1; 1)$   
C.  $\vec{m}$  và  $\vec{n}$  không cùng phương      D. Góc của  $\vec{m}$  và  $\vec{n}$  là  $60^\circ$

**Câu 4:** Cho 2 vectơ  $\vec{a} = (2; 3; -5)$ ,  $\vec{b} = (0; -3; 4)$ ,  $\vec{c} = (1; -2; 3)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$  là:

- A.  $\vec{n} = (5; 5; -10)$       B.  $\vec{n} = (5; 1; -10)$       C.  $\vec{n} = (7; 1; -4)$       D.  $\vec{n} = (5; -5; -10)$

**Câu 5:** Trong không gian Oxyz, cho  $\vec{a} = (5; 7; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; 4)$ ,  $\vec{c} = (-6; 1; -1)$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c} - 3\vec{i}$  là:

- A.  $\vec{n} = (16; 39; 30)$       B.  $\vec{n} = (16; -39; 26)$       C.  $\vec{n} = (-16; 39; 26)$       D.  $\vec{n} = (16; 39; -26)$

**Câu 6:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 2)$ ,  $\vec{b} = (0; -1; 3)$ ,  $\vec{c} = (4; -3; -1)$ . Xét các mệnh đề sau:

- (I)  $|\vec{a}| = 3$       (II)  $|\vec{c}| = \sqrt{26}$       (III)  $\vec{a} \perp \vec{b}$       (IV)  $\vec{b} \perp \vec{c}$   
(V)  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4$       (VI)  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương      (VII)  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{10}}{15}$

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

- A. 1      B. 6      C. 4      D. 3

**Câu 7:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau một góc  $\frac{2\pi}{3}$ . Biết  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  thì  $|\vec{a} - \vec{b}|$  bằng:

- A. 6      B. 5      C. 4      D. 7

**Câu 8:** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và 2. Biết  $(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\pi}{3}$ . Thì  $|\vec{a} + \vec{b}|$  bằng:

- A. 1      B.  $\frac{3}{2}$       C. 2      D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$



C. Tích vô hướng của hai vectơ là một vectơ.

D. Tích của vectơ có hướng và vô hướng của hai vectơ tùy ý bằng 0

**Câu 17:** Cho hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  khác  $\vec{0}$ . Phát biểu nào sau đây không đúng ?

A.  $[\vec{u}, \vec{v}]$  có độ dài là  $|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$       B.  $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$  khi hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.

C.  $[\vec{u}, \vec{v}]$  vuông góc với hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$       D.  $[\vec{u}, \vec{v}]$  là một vectơ

**Câu 18:** Ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (2; 1; m), \vec{c} = (2; m; 1)$  đồng phẳng khi:

A.  $\begin{cases} m = 9 \\ m = 1 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} m = -9 \\ m = 1 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} m = 9 \\ m = -2 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} m = -9 \\ m = -1 \end{cases}$

**Câu 19:** Cho ba vectơ  $\vec{a}(0; 1; -2), \vec{b}(1; 2; 1), \vec{c}(4; 3; m)$ . Để ba vectơ đồng phẳng thì giá trị của m là ?

A. 14      B. 5      C. -7      D. 7

**Câu 20:** Cho 3 vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 1); \vec{b} = (-1; 1; 2)$  và  $\vec{c} = (x; 3x; x+2)$ . Nếu 3 vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng thì x bằng

A. 1      B. -1      C. -2      D. 2

**Câu 21:** Cho 3 vectơ  $\vec{a} = (4; 2; 5), \vec{b} = (3; 1; 3), \vec{c} = (2; 0; 1)$ . Chọn mệnh đề đúng:

A. 3 vectơ đồng phẳng      B. 3 vectơ không đồng phẳng  
C. 3 vectơ cùng phương      D.  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

**Câu 22:** Cho 4 điểm  $M(2; -3; 5), N(4; 7; -9), P(3; 2; 1), Q(1; -8; 12)$ . Bộ 3 điểm nào sau đây là thẳng hàng:

A. N, P, Q      B. M, N, P      C. M, P, Q      D. M, N, Q

**Câu 23:** Trong không gian Oxyz, cho 3 vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0); \vec{b} = (1; 1; 0); \vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai

A.  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$       B.  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$       C.  $\vec{a} \perp \vec{b}$       D.  $\vec{b} \perp \vec{c}$

**Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho 3 điểm  $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1), P(1; m-1; 2)$ . Với giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

A.  $m = 3$       B.  $m = 2$       C.  $m = 1$       D.  $m = 0$

**Câu 25:** Cho vectơ  $\vec{u} = (1; 1; -2)$  và  $\vec{v} = (1; 0; m)$ . Tìm m để góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  có số đo  $45^\circ$ .

Một học sinh giải như sau :

Bước 1:  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}$

Bước 2: Góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  có số đo  $45^\circ$  suy ra:

$$\frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3}\sqrt{m^2+1} \quad (*)$$

$$\text{Bước 3: Phương trình } (*) \Leftrightarrow (1-2m)^2 = 2(m^2+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

- A. Đúng                      B. Sai ở bước 1                      C. Sai ở bước 2                      D. Sai ở bước 3

**Câu 26:** Trong không gian Oxyz, cho 3 vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ;  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ;  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$                       B.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng                      C.  $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$                       D.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

**Câu 27:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a} - 2\vec{b}$  là:

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{3}$                       C.  $6\sqrt{3}$                       D.  $2\sqrt{13}$

**Câu 28:** Cho  $\vec{a} = (3; 2; 1)$ ;  $\vec{b} = (-2; 0; 1)$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a} + \vec{b}$  bằng

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D.  $\sqrt{2}$

**Câu 29:** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 1; -2)$ ,  $\vec{b} = (1; 0; m)$ . Góc giữa chúng bằng  $45^\circ$  khi:

- A.  $m = 2 + \sqrt{5}$                       B.  $m = 2 - \sqrt{3}$                       C.  $m = 2 \pm \sqrt{6}$                       D.  $m = 2\sqrt{6}$ .

**Câu 30:** Trong hệ trục Oxyz, cho ba điểm  $A(-2, 1, 0)$ ,  $B(-3, 0, 4)$ ,  $C(0, 7, 3)$ . Khi đó,  $\cos(\overline{AB}, \overline{BC})$  bằng:

- A.  $\frac{14}{3\sqrt{118}}$                       B.  $-\frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{59}}$                       C.  $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{57}}$                       D.  $-\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{57}}$

**Câu 31:** Trong không gian Oxyz cho  $\vec{a} = (3; -2; 4)$ ;  $\vec{b} = (5; 1; 6)$ ;  $\vec{c} = (-3; 0; 2)$ . Tọa độ của  $\vec{x}$  sao cho  $\vec{x}$  đồng thời vuông góc với  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là:

- A. (0; 0; 1)                      B. (0; 0; 0)                      C. (0; 1; 0)                      D. (1; 0; 0)

**Câu 32:** Trong hệ tọa độ Oxyz cho điểm  $M(3; 1; -2)$ . Điểm N đối xứng với M qua trục Ox có tọa độ là:

- A. (-3; 1; 2)                      B. (-3; -1; -2)                      C. (3; 1; 0)                      D. (3; -1; 2)

**Câu 33:** Trong hệ trục Oxyz,  $M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M(3, 2, 1)$  trên Ox.  $M'$  có tọa độ là:

- A. (0, 0, 1)                      B. (3, 0, 0)                      C. (-3, 0, 0)                      D. (0, 2, 0)

**Câu 34:** Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho hai điểm  $A(2; -2; 1)$ ,  $B(3; -2; 1)$  Tọa độ điểm C đối xứng với A qua B là:

- A. C(1; 2; 1)                      B. D(1; -2; -1)                      C. D(-1; 2; -1)                      D. C(4; -2; 1)

**Câu 35:** Cho  $A(1;0;0), B(0;0;1), C(3;1;1)$ . Để ABCD là hình bình hành tọa độ điểm D là:

- A.  $D(1;1;2)$       B.  $D(4;1;0)$       C.  $D(-1;-1;-2)$       D.  $D(-3;-1;0)$

**Câu 36:** Cho ba điểm  $(1;2;0), (2;3;-1), (-2;2;3)$ . Trong các điểm  $A(-1;3;2), B(-3;1;4), C(0;0;1)$  thì điểm nào tạo với ba điểm ban đầu thành hình bình hành là ?

- A. Cả A và B      B. Chỉ có điểm C.      C. Chỉ có điểm A.      D. Cả B và C.

**Câu 37:** Cho  $A(4; 2; 6), B(10;-2; 4), C(4;-4; 0), D(-2; 0; 2)$  thì tứ giác ABCD là hình:

- A. Bình hành      B. Vuông      C. Chữ nhật      D. Thoi

**Câu 38:** Cho hình hộp ABCD.  $A'B'C'D'$ , biết  $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $A'$  ?

- A.  $A'(-2;1;1)$       B.  $A'(3;5;-6)$       C.  $A'(5;-1;0)$       D.  $A'(2;0;2)$

**Câu 39:** Trong không gian Oxyz, cho 2 điểm  $B(1;2;-3)$  và  $C(7;4;-2)$ . Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức  $\overline{CE} = 2\overline{EB}$  thì tọa độ điểm E là

- A.  $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$       B.  $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$       C.  $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$       D.  $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

**Câu 40:** Trong các bộ ba điểm:

- (I).  $A(1;3;1); B(0;1;2); C(0;0;1)$ ,  
(II).  $M(1;1;1); N(-4;3;1); P(-9;5;1)$ ,  
(III).  $D(1;2;7); E(-1;3;4); F(5;0;13)$ ,

Bộ ba nào thẳng hàng ?

- A. Chỉ III, I.      B. Chỉ I, II.      C. Chỉ II, III.      D. Cả I, II, III.

**Câu 41:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC biết  $A(-1;0;2), B(1;3;-1), C(2;2;2)$ . Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai ?

- A. Điểm  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; 1\right)$  là trọng tâm của tam giác ABC.

B.  $AB = \sqrt{2}BC$

C.  $AC < BC$

- D. Điểm  $M\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$  là trung điểm của cạnh AB.

**Câu 42:** Trong không gian Oxyz, cho hình bình hành OADB có  $\overline{OA} = (-1;1;0), \overline{OB} = (1;1;0)$  (O là gốc tọa độ). Khi đó tọa độ tâm hình bình hành OADB là:

- A.  $(0;1;0)$       B.  $(1;0;0)$       C.  $(1;0;1)$       D.  $(1;1;0)$

**Câu 43:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(2;1;0), B(3;1;-1), C(1;2;3)$ . Tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành là:

- A.  $D(2;1;2)$       B.  $D(2;-2;-2)$       C.  $D(-2;1;2)$       D.  $D(0;2;4)$



**Câu 44:** Cho 3 điểm  $A(2; 1; 4)$ ,  $B(-2; 2; -6)$ ,  $C(6; 0; -1)$ . Tích  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  bằng:

- A. -67                      B. 65                      C. 67                      D. 33

**Câu 45:** Cho tam giác ABC với  $A(-3; 2; -7)$ ;  $B(2; 2; -3)$ ;  $C(-3; 6; -2)$ . Điểm nào sau đây là trọng tâm của tam giác ABC

- A.  $G(-4; 10; -12)$       B.  $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{10}{3}; 4\right)$       C.  $G(4; -10; 12)$       D.  $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; -4\right)$

**Câu 46:** Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm  $A(1, 0, 0)$ ;  $B(0, 1, 0)$ ;  $C(0, 0, 1)$ ;  $D(1, 1, 1)$ . Xác định tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD

- A.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$       B.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$       C.  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$       D.  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

**Câu 47:** Trong không gian Oxyz cho 3 điểm  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(-2; 1; 3)$  và  $C(1; 4; 0)$ . Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

- A.  $\left(\frac{8}{13}; -\frac{7}{13}; \frac{15}{13}\right)$       B.  $\left(\frac{8}{13}; \frac{7}{13}; \frac{15}{13}\right)$       C.  $\left(-\frac{8}{13}; -\frac{7}{13}; \frac{15}{13}\right)$       D.  $\left(\frac{8}{13}; -\frac{7}{13}; -\frac{15}{13}\right)$

**Câu 48:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 3 điểm  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(2; 1; 1)$ ,  $C(0; 1; 2)$ . Gọi H(a; b; c) là trực tâm của tam giác. Giá trị của  $a + b + c$

- A. 4                      B. 5                      C. 7                      D. 6

**Câu 49:** Cho 3 điểm  $A(2; -1; 5)$ ;  $B(5; -5; 7)$  và  $M(x; y; 1)$ . Với giá trị nào của x ; y thì A, B, M thẳng hàng ?

- A.  $x = 4; y = 7$       B.  $x = -4; y = -7$       C.  $x = 4; y = -7$       D.  $x = -4; y = 7$

**Câu 50:** Cho  $A(0; 2; -2)$ ,  $B(-3; 1; -1)$ ,  $C(4; 3; 0)$ ,  $D(1; 2; m)$ . Tìm m để A, B, C, D đồng phẳng:

- A.  $m = -5$                       B.  $m = -1$                       C. 1                      D. 5

**Câu 51:** Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD. Độ dài đường cao vẽ từ D của tứ diện ABCD cho bởi công thức nào sau đây:

- A.  $h = \frac{|\overline{[AB, AC]} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{AB} \cdot \overline{AC}|}$       B.  $h = \frac{1}{3} \frac{|\overline{[AB, AC]} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{[AB, AC]}}|$   
 C.  $h = \frac{|\overline{[AB, AC]} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{[AB, AC]}}|$       D.  $h = \frac{1}{3} \frac{|\overline{[AB, AC]} \cdot \overline{AD}|}{|\overline{[AB, AC]}}|$

**Câu 52:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho  $\vec{u} = (1; 1; 2)$ ,  $\vec{v} = (-1; m; m - 2)$ . Khi đó  $|\overline{[\vec{u}, \vec{v}]}| = 4$  thì :

- A.  $m = 1; m = \frac{11}{5}$       B.  $m = -1; m = -\frac{11}{5}$       C.  $m = 3$                       D.  $m = 1; m = -\frac{11}{5}$



Bước 3: A, B, C, D đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 5 = 0$

Đáp số:  $m = -5$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

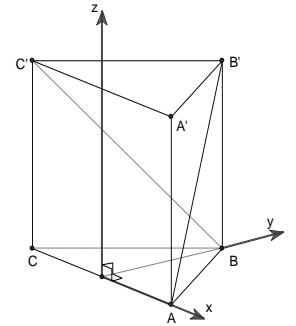
- A. Sai ở bước 2      B. Đúng      C. Sai ở bước 1      D. Sai ở bước 3

**Câu 61:** Cho lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$  và  $AB' \perp BC'$ . Tính thể tích khối lăng trụ. Một học sinh giải như sau:

Bước 1: Chọn hệ trục như hình vẽ:

$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), B'\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right), C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right), C'\left(-\frac{a}{2}; 0; h\right)$$

( $h$  là chiều cao của lăng trụ), suy ra  $\overline{AB'} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right)$ ;  $\overline{BC'} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right)$



Bước 2:  $AB' \perp BC' \Leftrightarrow \overline{AB'} \cdot \overline{BC'} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bước 3:  $V_{ABC.A'B'C'} = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Lời giải đúng      B. Sai ở bước 1      C. Sai ở bước 3      D. Sai ở bước 2

**Câu 62:** Cho vectơ  $\vec{u} = (1; 1; -2)$  và  $\vec{v} = (1; 0; m)$ . Tìm  $m$  để góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  có số đo bằng  $45^\circ$ . Một học sinh giải như sau:

Bước 1:  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}}$

Bước 2: Góc giữa  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  bằng  $45^\circ$  suy ra  $\frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3} \cdot \sqrt{m^2+1}$  (\*)

Bước 3: phương trình (\*)  $\Leftrightarrow (1-2m)^2 = 3(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{6} \\ m = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Sai ở bước 2      B. Sai ở bước 3      C. Bài giải đúng      D. Sai ở bước 1

**Câu 63:** Cho  $A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 4)$ . Tìm mệnh đề sai:

- A.  $\overline{AB} = (-2; 3; 0)$       B.  $\overline{AC} = (-2; 0; 4)$       C.  $\cos A = \frac{2}{\sqrt{65}}$       D.  $\sin A = \frac{1}{2}$

**Câu 64:** Trong không gian Oxyz cho 3 điểm  $A(2; 0; 0), B(0; 3; 0)$  và  $C(0; 0; 4)$ . Tìm câu đúng

- A.  $\cos A = \frac{-2\sqrt{65}}{65}$       B.  $\sin A = \sqrt{\frac{61}{65}}$       C.  $dt(\Delta ABC) = \sqrt{61}$       D.  $dt(\Delta ABC) = \sqrt{65}$

**Câu 65:** Trong không gian Oxyz cho tứ diện ABCD với  $A(0; 0; 1); B(0; 1; 0); C(1; 0; 0)$  và  $D(-2; 3; -1)$ . Thể tích của ABCD là:

- A.  $V = \frac{1}{3}$  đvtt      B.  $V = \frac{1}{2}$  đvtt      C.  $V = \frac{1}{6}$  đvtt      D.  $V = \frac{1}{4}$  đvtt

**Câu 66:** Cho  $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$ . Thể tích của khối tứ diện ABCD là:

- A.  $\frac{1}{2}$ (đvtt)      B.  $\frac{3}{2}$ (đvtt)      C. 1(đvtt)      D. 3(đvtt)

**Câu 67:** Cho  $A(2;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0), D(1;2;1)$ . Thể tích của khối tứ diện ABCD là:

- A. 30      B. 40      C. 50      D. 60

**Câu 68:** Cho  $A(-1;0;3), B(2;-2;0), C(-3;2;1)$ . Diện tích tam giác ABC là:

- A.  $\sqrt{62}$       B.  $2\sqrt{62}$       C. 12      D.  $\sqrt{6}$

**Câu 69:** Cho  $A(2;-1;3), B(4;0;1), C(-10;5;3)$ . Độ dài phân giác trong của góc B là:

- A.  $\sqrt{5}$       B.  $\sqrt{7}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       D.  $2\sqrt{5}$

**Câu 70:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho tam giác ABC với  $A = (1;2;-1), B = (2;-1;3), C = (-4;7;5)$ . Đường cao của tam giác ABC hạ từ A là:

- A.  $\sqrt{\frac{110}{57}}$       B.  $\frac{\sqrt{1110}}{52}$       C.  $\sqrt{\frac{1110}{57}}$       D.  $\sqrt{\frac{111}{57}}$

**Câu 71:** Cho  $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;4)$ . Diện tích tam giác ABC là:

- A.  $\frac{\sqrt{61}}{65}$       B.  $\sqrt{20}$       C.  $\sqrt{13}$       D.  $\sqrt{61}$

**Câu 72:** Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho hình bình hành ABCD với  $A = (1;0;1), B = (2;1;2)$  và giao điểm của hai đường chéo là  $I\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$ . Diện tích của hình bình hành ABCD là:

- A.  $\sqrt{5}$       B.  $\sqrt{6}$       C.  $\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{3}$

**Câu 73:** Trong không gian Oxyz cho các điểm  $A(1;1;-6), B(0;0;-2), C(-5;1;2)$  và  $D'(2;1;-1)$ . Nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thì thể tích của nó là:

- A. 26 (đvtt)      B. 40 (đvtt)      C. 42 (đvtt)      D. 38 (đvtt)

**Câu 74:** Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1,1,0); \vec{b} = (1,1,0); \vec{c} = (1,1,1)$ . Cho hình hộp OABC.O'A'B'C' thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ . Thể tích của hình hộp nói trên bằng bao nhiêu ?

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{3}$       C. 2      D. 6

**Câu 75:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho tọa độ 4 điểm  $A(2;-1;1); B(1;0;0); C(3;1;0)$  và  $D(0;2;1)$ . Cho các mệnh đề sau :

- (1) Độ dài  $AB = \sqrt{2}$ .
- (2) Tam giác BCD vuông tại B
- (3) Thể tích của tứ diện ABCD bằng 6

Các mệnh đề đúng là :

**A.** (1) ; (2)

**B.** (3)

**C.** (1) ; (3)

**D.** (2)

## **C – ĐÁP ÁN**

**1B, 2A, 3D, 4A, 5A, 6C, 7D, 8C, 9D, 10B, 11B, 12B, 13B, 14C, 15B, 16B, 17A, 18A, 19A, 20D, 21A, 22D, 23D, 24D, 25D, 26C, 27B, 28C, 29C, 30A, 31B, 32D, 33B, 34D, 35B, 36A, 37D, 38B, 39A, 40C, 41B, 42A, 43D, 44D, 45D, 46A, 47B, 48A, 49D, 50B, 51C, 52C, 53B, 54D, 55A, 56A, 57A, 58A, 59A, 60A, 61C, 62B, 63D, 64C, 65C, 66D, 67A, 68A, 69D, 70B, 71D, 72B, 73A, 74C, 75D.**